

格林第二恒等式在相位解缠中的应用

向茂生 李树楷

(中国科学院遥感应用研究所, 北京 100101)

摘要 研究了应用格林第二恒等式进行相位解缠的可能性。在假定相位的边界法线方向导数为已知的条件下, 导出了一种基于格林第二恒等式的相位解缠算法, 并且与最小二乘法及 G. Fornaro 等人的算法进行比较。结果表明, 这三者之间完全等效, 由此有效地将 G. Fornaro 等人的算法与最小二乘法联系在一起。

关键词 格林第二恒等式 相位解缠 泊松方程 最小二乘法

0 引言

一切将相位由主值(模为 2π)或相位差恢复到真值的方法统称为相位解缠(phase unwrapping)技术。相位解缠技术在自适应光学、补偿式成像、图象处理、同态信号处理、干涉雷达、固体物理等方面有着重要应用。

在进行二维相位解缠时, 如何处理相位的不一致性(inconsistency)或路径依赖性(path dependence)是相位解缠的关键和难点。如果不正确处理相位的不一致性问题, 它将引起相位误差由局部传播到整个区域。积分法和最小二乘法是相位解缠的常用方法。在处理相位的不一致性时, 它们的共同点是必须首先识别出相位不一致的区域(点和线)。解缠时, 积分法绕过这些区域; 最小二乘法则赋予这些区域小的权值。虽然这两种方法对于不一致性问题的处理都是非常有效, 但是, 问题的关键在于如何识别出相位不一致的区域。导致不一致性的原因是噪声和欠采样。目前, 尚没有方法能够区别出哪些不一致区域是由噪声引起, 哪些是由欠采样引起。文献[1]和[2]介绍了一些识别相位不一致区域的方法。如果没有有关的先验知识, 对于由欠采样引起的相位不一致的区域, 仅根据相位主值是无法识别的。在不一致区域不能完全正确识别的条件下, 最小二乘法要优于积分法。

G. Fornaro 等人提出了一种基于格林第一恒等式的相位解缠新方法^[3], 并称其能够有效抑制相位误差的传播。尔后(1996年12月)他们又发表文章^[4], 通过烦琐的数学推导, 证明了他们的方法与最小二乘法等效。

本文研究了应用格林第二恒等式进行相位解缠的可能性。在假定相位的边界法线方向导数为已知的条件下, 文章导出了一种基于格林第二恒等式的相位解缠算法, 并且与最小二乘法及 G. Fornaro 等人的算法进行了比较。结果表明, 这三者之间完全等效。由此方便简洁地证明了 G. Fornaro 等人的算法与最小二乘法等效。

1 原理

设 $\varphi(r)$ 和 $g(r)$ 在区域 S 和边界 C 上具有一阶连续偏导数, 在 S 内具有连续的所有二阶偏导数, 则由格林第二恒等式有:

$$\oint_C \left[\varphi(r) \frac{\partial g(r)}{\partial n} - g(r) \frac{\partial \varphi(r)}{\partial n} \right] dc = \iint_S [\varphi(r) \nabla^2 g(r) - g(r) \nabla^2 \varphi(r)] ds \quad (1)$$

其中, r 为矢量, 它指向 S 内或 C 上的任一点。假定 $\varphi(r)$ 为二维分布的相位值, $g(r)$ 为一格林函数, 本文仅研究相位的边界法线方向导数为已知的情况, 不

妨设为 $\frac{\partial \varphi(r)}{\partial n} = 0$, 则式(1)变成:

$$\oint_C \varphi(r) \frac{\partial g(r)}{\partial n} dc = \iint_{S-S_\epsilon} [\varphi(r) \nabla^2 g(r) - g(r) \nabla^2 \varphi(r)] ds \quad (2)$$

设 r_0 为指向区域 S 或边界 C 的另一矢量(参考图1), 则选取格林函数为如下形式:

$$g(r_0 - r) = -\frac{1}{2\pi} \ln |r_0 - r| \quad (3)$$

不难证明

$$\nabla^2 g(r_0 - r) = 0 \quad (4)$$

很明显, $g(r_0 - r)$ 在 $r = r_0$ 处有一奇异点。因此, 式(2)在该处不成立。由于 r_0 可能指向 S 内, 也可能指向 C 上, 因此下面分两种情况进行讨论。

(1) r_0 指向区域 S 内

如果 r_0 指向区域 S 内, 为使(2)式成立, 我们以 r_0 指向点为中心, 以充分小的正数 ϵ 为半径作一个圆 C_ϵ , 如图1所示。在 S 内挖去 C_ϵ 所包围的区域 S_ϵ , 则在由边界 C 和 C_ϵ 所包围的区域 $S - S_\epsilon$ 内, 有:

$$\oint_C \varphi(r) \frac{\partial g(r_0 - r)}{\partial n} dc + \oint_{C_\epsilon} \varphi(r) \frac{\partial g(r_0 - r)}{\partial n} dc = - \iint_{S-S_\epsilon} g(r_0 - r) \nabla^2 \varphi(r) ds. \quad (5)$$

在圆 C_ϵ 的法线方向有:

$$\frac{\partial g(r_0 - r)}{\partial n} = \frac{\partial g(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} \quad (6)$$

故 $\oint_{C_\epsilon} \varphi(r) \frac{\partial g(r_0 - r)}{\partial n} dc =$

$$\varphi(r_0) \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} \right] d(\epsilon\theta) = -\varphi(r_0) \quad (7)$$

将式(7)代入式(5), 得:

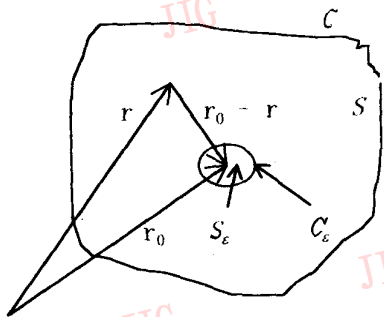


图1 r_0 指向区域内

$$\varphi(r_0) = \iint_{S-S_\epsilon} g(r_0 - r) \nabla^2 \varphi(r) ds + \oint_C \varphi(r) \frac{\partial g(r_0 - r)}{\partial n} dc \quad (8)$$

该式就是已知相位主值或相位差值, 恢复相位真值的算法。在该算法中, 要求知道相位在边界的值。在某些情况下, 相位在边界上的值可能知道。如果相位在边界上的值不知道, 也可以通过下面的方法求得。

(2) r_0 指至边界 C 上

如果 r_0 指至边界 C 上, 同样可以仿照上述的方法, 在边界上挖去一充分小的弧段, 则

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C-2\epsilon} \varphi(r) \frac{\partial g(r_0 - r)}{\partial n} dc + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{2\epsilon} \varphi(r) \frac{\partial g(r_0 - r)}{\partial n} dc = - \iint_S g(r_0 - r) \nabla^2 \varphi(r) ds. \quad (9)$$

式中, 2ϵ 为边界上以 r_0 向量点为中心的一小弧段, 如图2所示。设 X 为中心点的切线方向, Y 为法线方向, 且构成一以中心为原点的直角坐标系, 则:

$$g(r_0 - r) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (10)$$

$$\frac{\partial g(r_0 - r)}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (11)$$

故 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{2\epsilon} \varphi(r) \frac{\partial g(r_0 - r)}{\partial n} dc =$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{2\pi} \varphi(r_0) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{y}{x^2 + y^2} dx \right] = -\frac{1}{\pi} \varphi(r_0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \arctan \frac{\epsilon}{y} \quad (12)$$

$$\text{又 } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \arctan \frac{\epsilon}{y} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

因此, 式(9)整理得

$$\varphi(r_0) = 2 \left[\iint_S g(r_0 - r) \nabla^2 \varphi(r) ds + \oint_C \varphi(r) \frac{\partial g(r_0 - r)}{\partial n} dc \right] \quad (14)$$

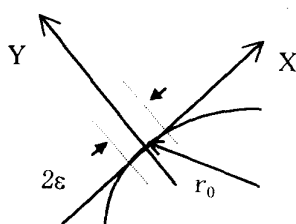


图2 r_0 指至边界上

其中, \int_c 代表除 $r=r_0$ 以外的非闭合边界。根据上述公式, 可以计算出相位的边界值, 以满足式(8)的需要。

2 与最小二乘法比较

设 ψ 为由相位主值计算的梯度, 则相位的最小二乘估值为:

$$\|\nabla\varphi - \psi\|^2 \rightarrow \min \quad (15)$$

上式等效于求解下列泊松方程:

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = \nabla \cdot \psi \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \psi \cdot \vec{n} \end{cases} \quad (16)$$

在实际的相位解缠(离散状态)时, 由于 $\psi \cdot \vec{n}$ 并不知道, 故假设其等于零^[5], 即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \psi \cdot \vec{n} = 0 \quad (17)$$

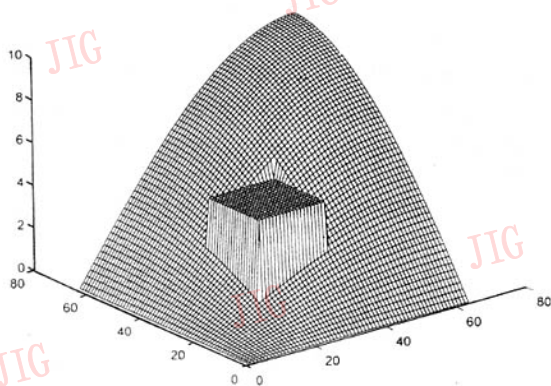
方程(16)的解可以直接用积分表达式写出, 但需区域的格林函数。如果边界相位也已知, 则泊松方程的解可写成如下形式

$$\varphi(r_0) = \iint_{s-s_0} g(r_0-r) \nabla \cdot \psi(r) ds + \oint_c \left[\varphi(r) \frac{\partial g(r_0-r)}{\partial n} - g(r_0-r) \frac{\partial \varphi(r)}{\partial n} \right] dc \quad (18)$$

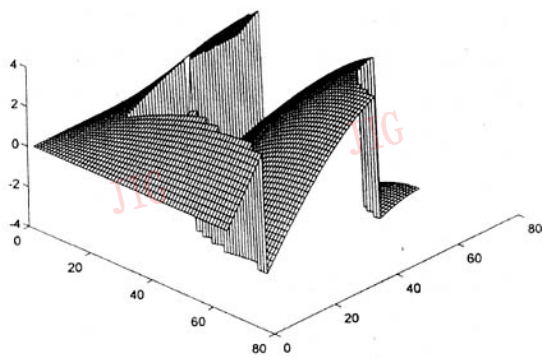
故: $\varphi(r_0) = \iint_{s-s_0} g(r_0-r) \nabla \cdot \psi(r) ds +$

$$\oint_c \varphi(r) \frac{\partial g(r_0-r)}{\partial n} dc \quad (19)$$

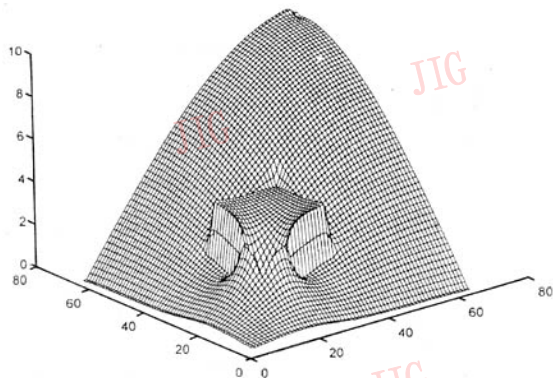
边界上的相位值可根据公式(14)求出。由此可见, 本文的算法与最小二乘法一致。



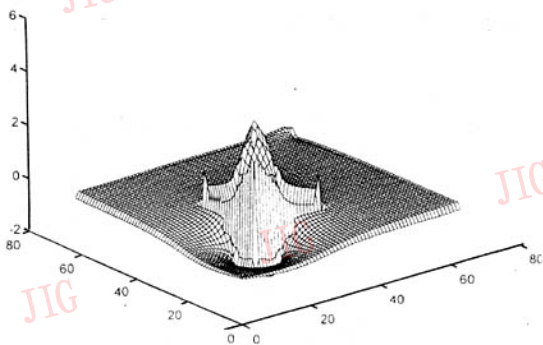
(a) 相位真值



(b) 相位主值



(c) 相位恢复值



(d) 恢复误差

图3 相位真值、主值、被恢复的相位及误差

3 与 G. Fornaro 等人的算法比较

G. Fornaro 等人根据格林第一恒等式得下列相位解缠算法^[3]:

$$\varphi(r_0) = - \iint_{s-s_i} \nabla g(r_0 - r) \cdot \nabla \varphi(r) ds + \oint_c \varphi(r) \frac{\partial g(r_0 - r)}{\partial n} dc. \quad (20)$$

由格林第一恒等式有:

$$\begin{aligned} \iint_{s-s_i} g(r_0 - r) \nabla^2 \varphi(r) ds = \\ - \iint_{s-s_i} \nabla g(r_0 - r) \cdot \nabla \varphi(r) ds + \\ \oint_c g(r) \frac{\partial \varphi(r_0 - r)}{\partial n} dc = \\ - \iint_{s-s_i} \nabla g(r_0 - r) \cdot \nabla \varphi(r) ds \end{aligned} \quad (21)$$

因此,本文的算法与基于格林第一恒等式的算法一致。

4 模拟结果

为了验证新算法的正确性和检验它的性能,我们构造了一个如图 3(a)(见上页)所示的二维相位分布。图 3(b)是该相位分布的测量值(主值)。用本文介绍的算法,得相位的恢复值如图 3(c)所示。图 3

(d)是相位的恢复误差。可以看出,误差主要集中在实际相位不连续的区域。要想消除这部分误差,必须对这种不连续区域进行识别,然后采用加权的办法解决。

5 结论

基于格林第二恒等式,本文提出了一种相位解缠新算法。如果相位的边界法线方向导数为零,该算法不仅与最小二乘法等效,而且与 G. Fornaro 等人的算法一致。即借助格林第二恒等式,本文简洁地将最小二乘法与 G. Fornaro 等人的算法联系在一起。

参考文献

- 1 goldstein R M, Zebker H A, Werner C L. Satellite radar interferometry; Two-dimensional phase unwrapping. *RadioSci.*, 1988, 23 (4): 713~720.
- 2 Prati C, Rocca F, Guarnieri A M, et al. Seismic migration for SAR focusing inter-ferometrical applications. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 1990, 28: 627~640.
- 3 Fornaro G, Franceschetti G, Lanari R. Interferometric SAR phase unwrapping Using Green's Formulation. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 1996, 34: 720~727.
- 4 Fornaro G, Franceschetti G, Lanari R, et al. Robust phase-unwrapping techniques; a comparison. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1996, 13(12).
- 5 Ghiglia D C, Romero L A. Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, 11(1).



向茂生 1964 年 6 月生, 博士, 现从事遥感直接对地定位研究。



李树楷 1940 年生, 研究员, 博士生导师, 现主要从事遥感集成技术系统研究。

The Application of Green's Second Identity to Phase Unwrapping

Xiang Maosheng, Li Shukai

(Institute of Remote Sensing Applications, Academia Sinica, Beijing 100101)

Abstract This paper analyzes the possibility of phase unwrapping using Green's second identity. Assuming that the normal deviation along the border is known, this paper addresses a new phase unwrapping algorithm based on use of Green's second identity and compares the performance of the new algorithm with the algorithm based on use of Green's first identity as well as LMS. Results have proved that the new algorithm is equivalent that of LMS as well as Green's first identity.

Keywords Green's second identity, Phase unwrapping, Poisson's equation, Least-squares